Sesión Especial 22

Métodos numéricos para Ecuaciones en Derivadas Parciales

Organizadores

- Isaías Alonso Mallo (Universidad de Valladolid)
- Begoña Cano Urdiales (Universidad de Valladolid)

Descripción

Con esta propuesta tratamos de dar continuidad a una sesión con la misma temática organizada exitosamente en RSME2017 por los profesores Carmelo Clavero y Juan Carlos Jorge. Las Ecuaciones en Derivadas Parciales constituyen la principal forma de modelización para muchas disciplinas de la Ciencia y la Tecnología y, como es bien sabido, su resolución analítica resulta imposible en la mayoría de los casos. Por este motivo, en esta sesión abordamos uno de los pilares básicos de la Matemática Aplicada. Queremos además consolidar con esta propuesta un espacio donde los expertos en este campo de distintas universidades españolas puedan encontrarse, intercambiar sus ideas y aportaciones y propiciar nuevas oportunidades de colaboración.

Programa

Jueves, 7 de febrero (tarde)

15:30 – 16:00	Carmelo Clavero (Universidad de Zaragoza) *Resolución eficiente de sistemas parabólicos unidimensionales singularmente perturbados de tipo convección-difusión*
16:00 – 16:30	Juan Carlos Jorge (Universidad Pública de Navarra) *Un método numérico uniformemente convergente para sistemas evolutivos semilineales de tipo difusión-reacción*
16:30 – 17:00	Henar Herrero (Universidad de Castilla-La Mancha) *Bases reducidas en problemas de autovalores de inestabilidades termoconvectivas*
17:30 – 18:00	Rodolfo Bermejo (Universidad Politécnica de Madrid) *A finite element model for the system of nonlinear Lithium-ion battery equations*
18:00 – 18:30	José Luis Gracia (Universidad de Zaragoza) *Numerical approximation of a space-fractional differential equation*

Viernes, 8 de febrero (mañana)

09:00 – 09:30	Carlos Parés (Universidad de Málaga) *High-order well-balanced numerical methods for systems of balance laws*
09:30 – 10:00	Fernando Casas (Universidad Jaume I de Castellón) *Splitting and composition methods with embedded error estimators*
10:00 – 10:30	Severiano González Pinto (Universidad de la Laguna) *AMF-type methods for parabolic problems with mixed derivatives. Applications to the Heston problem*
10:30 – 11:00	Ana M. Portillo (Universidad de Valladolid) *Discretizaciones casi conservativas de la energía para ecuaciones de ondas sísmicas bidimensionales acopladas*
11:30 – 12:00	C. Palencia (Universidad de Valladolid) *Families of Runge-Kutta like methods without order reduction*
12:00 – 12:30	M. Jesús Moreta (Universidad Complutense de Madrid) *Reglas de cuadratura exponencial sin reducción de orden para integrar problemas lineales de valor inicial y de frontera*
12:30 – 13:00	Nuria Reguera (Universidad de Burgos) *Dos técnicas para evitar reducción de orden al integrar numéricamente problemas no lineales con el método de Strang*

A finite element model for the system of nonlinear Lithium-ion battery equations

Rodolfo Bermejo

Universidad Politécnica de Madrid Dpto. de Matemáticas ETSII

rbermej@etsii.upm.es

Abstract. We present a finite element model for the non linear system of parabolic-elliptic equations that describe the charge/discharge cycle of a Lithium-ion cell, and prove error estimates for the discrete solution.

Splitting and composition methods with embedded error estimators

Fernando Casas

Universitat Jaume I de Castellón

Fernando.Casas@uji.es

Abstract. Splitting and composition methods are by now standard numerical procedures to integrate differential equations in the realm of Geometric Numerical Integration, where preserving whatever invariants the systems has is of paramount importance. Nevertheless, even in problems where no qualitative properties have to be preserved and/or short time integrations are required, this class of methods have shown to be an excellent option when compared with other standard integrators.
It is in this setting where endowing splitting and composition methods with an efficient embedded error estimator could be most useful for step size control. The idea is to construct, in addition to the numerical solution, a second approximation from intermediate outputs, so that the difference is used as an estimator for the local error.
In this talk we show how these local order schemes can be obtained at each step as a linear combination of the intermediate stages of the integrator, so that the additional computational cost required for their evaluation is almost insignificant. The estimators thus constructed are subsequently used to adapt the step size along the integration. Numerical examples show the efficiency of the procedure, in comparison with other well known embedded integration methods.

Joint work with Sergio Blanes (Universitat Politècnica de València) and Mechthild Thalhammer (Universität Innsbruck)

With financial support from the research project MTM2016-77660-P (AEI/FEDER, UE)

Resolución eficiente de sistemas parabólicos unidimensionales singularmente perturbados de tipo convección-difusión

C. Clavero

Universidad de Zaragoza

clavero@unizar.es

Resumen. En este trabajo diseñamos un método numérico para resolver sistemas diferenciales de perturbación singular, parabólicos, unidimensionales en espacio, acoplados en los términos de reacción y débilmente acoplados en los términos de convección. Los coeficientes de difusión son positivos, pueden ser muy pequeños, distintos y, además, pueden tener diferente orden de magnitud; en este caso aparecen capas límite superpuestas en la frontera saliente del domino espacial. El método numérico combina el esquema clásico "upwind" para discretizar en espacio, definido en una malla de tipo Shishkin, y el método de Euler implícito fraccionario a paso fijo, junto con una descomposición por componentes para integrar en tiempo los problemas "stiff" resultantes de la discretización espacial. El algoritmo es uniformemente convergente y tiene orden uno de convergencia en tiempo y casi uno en espacio. El uso de pasos fraccionarios y la descomposición por componentes hace que en cada paso en tiempo sólo resolvamos sistemas lineales tridiagonales. Por ello, el algoritmo es más eficiente que los métodos implícitos clásicos. Los resultados obtenidos para algunos problemas test ilustran la convergencia uniforme y la eficiencia del algoritmo numérico.

Trabajo en colaboración con J.C. Jorge
Financiado por los proyectos MTM2014-52859-P, MTM2017-83490-P y el Gobierno de Aragón (Grupo Consolidado E24-17R)

AMF-type methods for parabolic problems with mixed derivatives. Applications to the Heston problem.

Severiano González Pinto

Universidad de La Laguna

spinto@ull.edu.es

Abstract. We propose very simple AMF-type methods for the time integration of the large ODEs resulting from the spatial discretization of parabolic PDE problems with mixed derivatives by means of Finite Differences. The methods are based on directional splitting made on the derivative function by following the approach in [1] related to AMFR-W-methods. We present some unconditional stability results of them and applications to the Heston model [2], which is widely used in Financial Mathematics.

Referencias

[1] S. González-Pinto, E. Hairer, D. Hernández-Abreu, S. Pérez-Rodríguez, *AMF-type W-methods for parabolic problems with mixed derivatives*, Siam J. Sci. Comp., 40 n. 5 (2018) A2905-A2929.

[2] K. in't Hout and S. Foulon, *ADI Finite Difference schemes for option pricing in the Heston Model with correlation*, Int. J. Numer. Anal. Model., 7, n. 2 (2010) 303-320.

[3] S. González-Pinto, D. Hernández-Abreu, S. Pérez-Rodríguez, *AMFR-W-methods for parabolic problems with mixed derivates. Applications to the Heston Model*, submitted for publication.

Joint work with Domingo Hernández Abreu and Soledad Pérez Rodríguez.
This work is supported by the FEDER/MINECO project MTM2016-77735-C3-3-P

Numerical approximation of a space-fractional differential equation

José Luis Gracia

Universidad de Zaragoza

jlgracia@unizar.es

Abstract. In this talk we consider a two-point boundary value problem on the interval $[0, 1]$, whose leading term is a fractional derivative of order α with $1 < \alpha < 2$ which is intertwined with a left Caputo fractional derivative. The choice of the boundary condition at $x = 0$ and the regularity of the solution is discussed. The singular behaviour of the solution near $x = 0$ is taking into account in the analysis of the convergence of a finite difference scheme on a uniform mesh. Error estimates in the maximum norm are derived and the numerical results for some test problems are showed.

Trabajo en colaboración con Eugene O'Riordan (Dublin City University, Irland) y Martin Stynes (Beijing Computational Science Research Center, China)
Financiado por el Instituto Universitario de Matemáticas y Aplicaciones, el proyecto MTM2016-75139-R y la Diputación General de Aragón (Grupo de referencia E24-17R)

Bases reducidas en problemas de autovalores de inestabilidades termoconvectivas

Henar Herrero

Universidad de Castilla-La Mancha / University of Castilla-La Mancha

Henar.Herrero@uclm.es

Abstract. Instabilities and bifurcation problems are computationally expensive because the model partial differential equations and eigenvalue problems associated to the linear stability analysis have to be solved for many different values of the parameters. Rayleigh-Bénard convection problem displays multiple steady solutions and bifurcations by varying the Rayleigh number R. The reduced basis (RB) approximation is a discretization method that can be implemented to solve parameter-dependent problems with many queries. This method consists of approximating the solution by a linear combination of appropriate preliminary computed solutions chosen by an iterative procedure using the kolmogorov n-width measure [2, 4]. In Ref. [1] RB method is applied to a Rayleigh-Bénard problem modeled with the incompressible Navier-Stokes equations coupled with a heat equation under the Boussinesq approximation. A linear stability analysis of these solutions is performed in [3] with a spectral collocation method.

In this work the eigenvalue problem of the corresponding linear stability analysis is solved with the RB method. R varies in the interval [1000; 2000] where different stable and unstable solutions appear at different bifurcation points [1, 3]. The elements of the reduced basis belong to the eigenfunction spaces coming from the eigenvalue problems for different types of solutions in the bifurcation diagram. The eigenvalues and eigenfunctions are easily calculated and the bifurcation points are exactly captured. The resulting matrices are small and this allows a drastic reduction of the computational cost on the eigenvalue problems.

Referencias

[1] H. Herrero, Y. Maday and F. Pla, RB (Reduced basis) for RB (Rayleigh-Bénard). Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 261-262, pp. 132-141, 2013.

[2] Y. Maday, A.T. Patera and G. Turinici, Convergence theory for reduced-basis approximations of single-parameter elliptic partial differential equations. J. Sci. Comput., Vol. 7(1-4), pp. 437-446, 2002.

[3] F. Pla, A.M. Mancho and H. Herrero, Bifurcation phenomena in a convection problem with temperature dependent viscosity at low aspect ratio. Physica D, Vol 238, pp. 572-580, 2009.

[4] C. Prud'homme, D.V. Rovas, K. Veroy, L. Machiels, Y. Maday, A.T. Patera and G. Turinici, Reliable real-time solution of parametrized partial differential equations: Reduced basis output bound methods, Journal of Fluids Engineering, Vol 124(1), pp. 70-80, 2002.

Trabajo en colaboración con Francisco Pla / Joint work with Francisco Pla.
Financiado por MINECO (MTM2015-68818-R y UCLM (GI20174046).

Un método numérico uniformemente convergente para sistemas evolutivos semilineales de tipo difusión-reacción.

J.C. Jorge

Universidad Pública de Navarra

jcjorge@unavarra.es

Resumen. En este trabajo diseñamos y analizamos un método numérico para la resolución de sistemas parabólicos unidimensionales de tipo difusión-reacción formulados como sigue: Encontrar $\mathbf{u}(x,t) : [0,1] \times [0,T] \to \mathcal{R}^n$ solución de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(x,t) - \mathcal{D}_\varepsilon \dfrac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2}(x,t) + \mathcal{A}(x,t,\mathbf{u}) = \mathbf{0}, \ (x,t) \in (0,1) \times (0,T], \\ \mathbf{u}(0,t) = \mathbf{g_0}(t), \ \mathbf{u}(1,t) = \mathbf{g_1}(t), \ \forall\, t \in (0,T], \ \mathbf{u}(x,0) = \varphi(x), \ \forall\, x \in [0,1], \end{cases}$$

donde $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)^T$, las ecuaciones están ordenadas de forma que $\mathcal{D}_\varepsilon =$ diag $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$, con $0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 \leq \ldots \leq \varepsilon_n \leq 1$ y el término de reacción no lineal $\mathcal{A}(x,t,\mathbf{u})$ se compone de funciones suficientemente regulares. Prestaremos especial atención al caso en el que los coeficientes de difusión ε_i son pequeños y, además, pueden tener diferentes órdenes de magnitud, lo que provoca la presencia de capas límite solapadas en $x = 0$ y $x = 1$. El método numérico que proponemos combina el esquema en diferencias centrales, definido sobre una malla de tipo Shishkin, para discretizar en espacio y una versión linealizada del método de Euler implícito fraccionario, combinado con una descomposición por componentes, para integrar en tiempo. El algoritmo resultante de este proceso es uniforme e incondicionalmente convergente.

Trabajo en colaboración con C. Clavero
Financiado por los proyectos MTM2014-52859-P, MTM2017-83490-P y el Gobierno de Aragón (Grupo Consolidado E24-17R)

Reglas de cuadratura exponencial sin reducción de orden para integrar problemas lineales de valor inicial y de frontera

M. Jesus Moreta

Universidad Complutense de Madrid

mjesusmoreta@ccee.ucm.es

Resumen.
En esta comunicación se presenta una técnica para evitar por completo la reducción de orden que se observa al integrar problemas lineales de valores iniciales y de frontera de la forma

$$\begin{aligned} u'(t) &= Au(t) + f(t), \quad 0 \le t \le T, \\ u(0) &= u_0, \\ \partial u(t) &= g(t), \end{aligned}$$

con reglas de cuadratura exponenciales. Cuando se eligen los s nodos de las regla de cuadratura de la forma adecuada, podemos llegar a alcanzar orden $2s$ en tiempo, mientras que con la aproximación clásica el orden máximo que se alcanza es s.
Presentamos el estudio realizado cuando se integra el problema tanto de la forma clásica (integrando primero en espacio y después en tiempo), como al revés, discretizando de una manera adecuada para evitar la reducción de orden. Para ambas formas de integrar, las condiciones frontera que se utilizan dependen del tiempo y, para una discretización espacial muy general, mostramos la forma de implementar los métodos sugeridos una vez elegidos los nodos de cuadratura para la integración temporal.
Se muestran también varios experimentos numéricos que corroboran que, con la técnica sugerida, para regla de cuadratura gaussiana de s nodos, se obtiene orden $2s$.

Referencias

[1] B. Cano, M. J. Moreta, *Exponential quadrature rules without order reduction for integrating linear initial boundary value problems*, SIAM J. NUMER. ANAL. Vol. 56, No. 3 (2018), pp. 1187–1209.

Trabajo en colaboración con B. Cano, de la Universidad de Valladolid
Financiado por Ministerio de Economía y Competitividad, Junta de Castilla y León y FEDER mediante los proyectos MTM 2015- 66837-P y VA024P17

Families of Runge-Kutta like methods without order reduction

C. Palencia

Universidad de Valladolid

cesar.palencia@tel.uva.es

Abstract. A stable Runge-Kutta method applied to a linear, non-homogeneous, stiff problem exhibits a practical oder of converge which ris related to its stage order, rather than to its classical one. This is the so-called order-reduction phenomenon. A new strategy results in families of stable Runge-Kutta like methods which avoid the order reduction. The approach relies on rational approximations to abstract semigroups.

Financed by the Spanish Ministerio de Economía y Competitividad under project MTM2017-83490-P

High-order well-balanced numerical methods for systems of balance laws

Carlos Parés

Universidad de Málaga

pares@uma.es

Abstract. The goal of this work is to design high-order well-balanced numerical methods for 1d systems of balance laws. More precisely, we focus on the design of numerical methods that preserve all the stationary solutions of a P.D.E. system of the form:

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{f}(\mathbf{u})_x + S(\mathbf{u})H_x = 0,$$

where $\mathbf{u} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \Omega \subset \mathbb{R}^N$, $\mathbf{f}$ is a nonlinear flux vector, S is a function from Ω to $\mathbb{R}^N$, and H is a known continuous function from $\mathbb{R}$ to $\mathbb{R}$.

The numerical methods presented here are based on standard reconstruction operators of arbitrary accuracy. According to [1], given a family of cell averages $\{U_i\}$, the reconstruction function at the ith cell I_i is computed as follows: (i)Look for the stationary solution $U_i^*(x)$ of the family to be preserved whose cell-average is equal to U_i. (ii)Compute the fluctuations

$$V_j = U_j - \frac{1}{\Delta x}\int_{I_j} U_i^*(x)\, dx$$

in the cells I_j belonging to the stencil $\mathcal{S}_i$ of the ith cell. (iii)Apply the reconstruction operator to $\{V_j\}_{j\in\mathcal{S}_i}$ to obtain $Q_i(x)$. (iv)Define the reconstruction function at I_i by $P_i(x) = U_i^*(x) + Q_i(x)$.

The well-balanced property of the numerical methods will be shown and illustrated in different test problems. The implementation difficulties will be discussed as well.

Referencias

[1] M. J. Castro, T. Morales de Luna, and C. Parés, Well-balanced schemes and path-conservative numerical methods. In *Handbook of Numerical Analysis* 18, 1315-1341, Elsevier 2017.

Joint work with Manuel J. Castro

Discretizaciones casi conservativas de la energía para ecuaciones de ondas sísmicas bidimensionales acopladas

Ana M. Portillo

Universidad de Valladolid

anapor@mat.uva.es

Resumen. Se consideran ondas sísmicas bidimensionales acopladas, que satisfacen las ecuaciones del movimiento en un medio isotrópico, homogéneo, perfectamente elástico

$$\begin{cases} \partial_{tt}u_1 = \alpha_{11}\partial_{xx}u_1 + \alpha_{22}\partial_{yy}u_1 + 2\alpha_{12}\partial_{xy}u_2, \\ \partial_{tt}u_2 = \alpha_{22}\partial_{xx}u_2 + \alpha_{11}\partial_{yy}u_2 + 2\alpha_{12}\partial_{xy}u_1, \end{cases}$$

para los coeficientes $\alpha_{11} = (\lambda+2\mu)/\rho$, $\alpha_{22} = \mu/\rho$, y $\alpha_{12} = (\lambda+\mu)/(2\rho)$, donde ρ es la densidad del material a través del que se propagan las ondas, λ es el primer coeficiente de Lamé y μ es el módulo de rigidez o segundo coeficiente de Lamé. Se trabaja en un dominio rectangular con condiciones iniciales y condiciones de frontera periódicas. Las derivadas espaciales de segundo orden, en la dirección x, en la dirección y y la derivada mixta, se aproximan en una red uniforme con diferencias finitas de oden 2 y orden 4. Para condiciones iniciales de soporte compacto en un abierto contenido en el dominio, se prueba que las energías discretas asociadas a las discretizaciones espaciales de orden 2 y 4 son aproximaciones de la energía del problema continuo de orden 2 y 4 respectivamente. El sistema ordinario de segundo orden en tiempo, obtenido tras la discretización espacial, se transforma en un sistema de primer orden en tiempo en los vectores de desplazamiento y velocidad. Para la integración temporal se proponen métodos fraccionados de tipo exponencial, de segundo y cuarto orden, que son esquemas geométricos. Como estos métodos fraccionados explícitos no son incondicionalmente estables se estudia la condición de estabilidad para la solución numérica. Concretamente se deduce la ratio entre el tamaño de paso en tiempo y en espacio para asegurar dicha estabilidad para la combinación de las dos discretizaciones espaciales y los dos integradores temporales de tipo fraccionado considerados. Se incluyen experimentos numéricos que muestran el buen comportamiento en la integración a tiempos largos de los dos métodos geométricos y se estudia la eficiencia de la solución numérica.

Referencias

[1] A. M. Portillo, *Near conserving energy numerical schemes for two-dimensional coupled seismic wave equations*, Comput. Math. Appl. 75 (2018) 1016–1037.

[2] A. M. Portillo, *High order full discretization for anisotropic wave equations*, Appl. Math. Comput. 323 (2018) 1–16.

Financiado por el proyecto MTM2015-66837-P del Ministerio de Economía y Competitividad

---

Dos técnicas para evitar reducción de orden al integrar numéricamente problemas no lineales con el método de Strang

Nuria Reguera

Universidad de Burgos

nreguera@ubu.es

Resumen.
En este trabajo nos centramos en el problema de evitar la reducción de orden al utilizar el método de Strang para integrar problemas no lineales de valor inicial y de frontera con condiciones de frontera dependientes del tiempo. En la literatura existen varios artículos abordando este importante problema [1], [3].
En este trabajo vamos a presentar la técnica para evitar la redución de orden propuesta en [1], así como los resultados obtenidos relativos al error local y al error global. También vamos a mostrar una comparación numérica, en términos de eficiencia computacional, entre las técnicas [1] y [3]. Veremos que es importante considerar un método exponencial, que evite también la reducción de orden, para la integración de la parte lineal, no homogénea y rígida en la técnica propuesta en [3] para que sea comparable en eficiencia con la sugerida en [1].

Referencias

[1] I. Alonso-Mallo, B. Cano and N. Reguera, *Avoiding order reduction when integrating reaction-diffusion boundary value problems with exponential splitting methods*, arXiv:1705.01857, submitted for publication.

[2] I. Alonso-Mallo, B. Cano and N. Reguera, *Comparison of efficiency among different techniques to avoid order reduction with Strang splitting*, submitted for publication.

[3] L. Einkemmer and A. Ostermann, *Overcoming order reduction in diffusion-reaction splitting. Part 2: Oblique boundary conditions*, SIAM J. Sci. Comput. **38** (2016) A3741-A3757.

Trabajo en colaboración con Isaías Alonso-Mallo y Begoña Cano
Financiado por Ministerio de Ciencia e Innovación y por Fondos Europeos de Desarrollo Regional a través del proyecto MTM 2015-66837-P y por Junta de Castilla y León y Feder a través de los proyectos VA024P17, VA105G18 y VA041P17.
